数理解析研究所講究録
第1840巻 2013年 149-164

Supergroups over $\mathbb{Z}$

筑波大学大学院・数理物質科学研究科・数学専攻　柴田 大樹
Taiki SHIBATA
Graduate School of Pure and Applied Sciences
University of Tsukuba

概要

増岡 による体上の Harish-Chandra ペアの理論を，適当な条件の下で $\mathbb{Z}$ 上に拡張することによって，スーパー・アフィン代数群を構成した．その結果として，Fioresi, Gavarini らの Chevalley スーパー群をより一般的に構成した．また群の表現に関しても通常の場合の結果のスーパー版を得た．

1 代数群・スーパー代数群

まず，環というと（単位元を持つ）可換環のこととし，基礎環を $\Bbbk$ とかく．$\Bbbk$-代数全体を $\mathrm{Alg}_{\Bbbk}$ とかく．基礎環を固定するとき $\Bbbk$-加群や $\Bbbk$-代数 などは単に，加群や 代数 と $\Bbbk$ を付けずにいう．また添え字 $\otimes_{\Bbbk}$ を $\otimes$ のように略す．

1.1 代数群とは？

"代数群" の一般的な定義としては，我々は A. Grothendieck による関手的立場をとる．

定義 1.1.1. 可換代数の圏から群の圏への関手 G が **アフィン群** とは G が表現可能関手であるときにいう．すなわち，G に対してある可換代数 $\mathcal{O}(G)$ が存在して，$G(-) = \mathrm{Alg}_{\Bbbk}(\mathcal{O}(G), -)$ となるときにいう．

この定義で基礎環 $\Bbbk$ は任意の環でよいことに注意する．

例 1.1.2. 一般に可換ホップ代数 A が与えられたとき，余積を次のように表記する (Heynemann-Sweedler 記法)：

$$\Delta(a) \; = \; \sum a_{(1)} \otimes a_{(2)} \qquad (a \in A).$$

このとき，$G := \mathrm{Alg}_{\Bbbk}(A, -)$ とおくと，各可換代数 R に対して $G(R)$ は次の $*$-積によって

群となる：

$$(f * g)(a) = \sum f(a_{(1)})\, g(a_{(2)}), \qquad f, g \in G(R),\ a \in A. \tag{1.1.1}$$

すなわち，G は A で表現されるアフィン群となる．これを $\mathrm{Sp}A := G$ とかくことにする．

■

実は，米田の補題より次のように，アフィン群のなす圏と可換ホップ代数のなす圏は反圏同型となっていることが知られている：

定理 1.1.3 ([Wat, Chapter 1]).

$$\begin{array}{ccc} (\text{アフィン群}) & \overset{\text{反同型}}{\cong} & (\text{可換ホップ代数}) \\ G & \longmapsto & \mathcal{O}(G) \\ \mathrm{Sp}A & \longleftarrow\!\!\shortmid & A \end{array}$$

そこで，本題の "代数群" の定義として次を採用する：

定義 1.1.4. アフィン群 G が **アフィン代数群** であるとは，$\mathcal{O}(G)$ が代数として有限生成な可換ホップ代数であるときにいう．

1.2 スーパー代数群とは？

我々の研究対象であるスーパー代数群の説明をする．

まず "スーパー" とは単に "$\mathbb{Z}_2$-graded"($\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$) と同義語の概念のことで，例えば，$\mathbb{Z}_2$-graded 加群 $V = V_0 \oplus V_1$ のことを単に**スーパー加群**というのである．このとき言葉遣いとして V_0 を**偶部 (even part)**，V_1 を**奇部 (odd part)** といい，元 $v \in V$ に関して，$v \in V_i$ $(i = 0, 1)$ のときに $|v| := i$ とかきこれを v の**パリティー**という．

代数，リー代数，ホップ代数などは，その構造が乗っている "足場" として加群（のなす対称テンソル圏）があったが，スーパー・アナロジーとしてこの "足場" をスーパー加群としたものの上に，同様の構造を乗せたものを**スーパー代数**，**スーパー・リー代数**，**スーパー・ホップ代数**などというのである．ここでスーパー加群全体には次の構造を入れ対称テンソル圏とみなす．スーパー加群 V, W に対して

$$\begin{array}{rcl} \text{テンソル構造} & : & (V \otimes W)_i = \bigoplus_{j+\ell=i} (V_i \oplus W_\ell), \quad (i = 0, 1); \\ \text{unit object} & : & \Bbbk = \Bbbk \oplus 0; \\ \text{スーパー対称性} & : & V \otimes W \to W \otimes V\,;\ v \otimes w \mapsto (-1)^{|v||w|}\, w \otimes v. \end{array}$$

またスーパー代数 A が**スーパー可換代数**であるとは，$a, b \in A$ に対して $ab = (-1)^{|a||b|} ba$ が成立するときをいう．

注意 1.2.1. スーパー対称性を見ればわかるように，スーパー構造が与えられたときにその偶部のみを見れば，これは通常の構造をもっている．例えば，スーパー代数（$= \mathbb{Z}_2$-graded 代数）$A(= A_0 \oplus A_1)$ に関して，これの偶部 A_0 は通常の代数である．しかし，奇部同士の積はテンソル構造の入れ方から偶部に落ちる $(A_1 \otimes A_1 \to A_0)$ ので，A_0 には奇部の情報が紛れ込んでいる．

例 1.2.2. スーパー代数（$= \mathbb{Z}_2$-graded 代数）A がスーパー・ホップ代数であるとは，次のスーパー代数射（$\mathbb{Z}_2$-grading を保つ代数射）

$$\Delta \, : \, A \to A \otimes A, \qquad \varepsilon \, : \, A \to \Bbbk$$

によって (A, Δ, ε) が（スーパー）余代数をなしており，アンチポード $S : A \to A$ をもつものである．ここで Δ は特に乗法的であるので；

$$\Delta(ab) \;=\; \sum (-1)^{|a_{(2)}||b_{(1)}|} a_{(1)}b_{(1)} \otimes a_{(2)}b_{(2)}$$

となっていることに注意. □

さて以上の言葉使いのもとで，通常の場合のスーパー・アナローグとしてスーパー代数群を定義していく．

定義 1.2.3. スーパー可換代数の圏から群の圏への表現可能関手を **スーパー・アフィン群** という．

この場合も定理 1.1.3 と同様のことが成り立つ：

$$\begin{array}{ccc} (\text{スーパー・アフィン群}) & \overset{\text{反同型}}{\cong} & (\text{スーパー可換ホップ代数}) \\ \mathfrak{G} & \longmapsto & \mathcal{O}(\mathfrak{G}) \\ \mathrm{SSp}A & \longleftarrow & A \end{array}$$

ただし区別のため，スーパーの群をドイツ文字の $\mathfrak{G}$ でかき，A の表現するスーパー・アフィン群を $\mathrm{SSp}A$ とかいている．

定義 1.2.4. 有限生成なスーパー可換ホップ代数で表現されるスーパー・アフィン群を **スーパー・アフィン代数群** という．

以上のように通常の場合の一般化としてスーパー・アフィン群を定義したのだが，実は $\mathfrak{G}$ の中には最大の通常のアフィン群が含まれており，これを $\mathfrak{G}_{\mathrm{rcs}}$ とかき $\mathfrak{G}$ **の制限部**ということにする．これは実際に，次のように定義すればよい（注意 1.2.1 を参照）：

$$\mathcal{O}(\mathfrak{G}_{\mathrm{rcs}}) \;:=\; A/\langle A_1 \rangle .$$

ここで，$\langle A_1 \rangle$ は A_1 の生成する A のイデアルである．

例 1.2.5. スーパー加群 $V = V_0 \oplus V_1$，ただし V_0, V_1 はそれぞれ階数 m, n の自由加群．について，次のような群関手を考える：

$$\begin{array}{rcccl} \mathrm{GL}_V = \mathrm{GL}(m|n) & : & (\text{スーパー可換代数}) & \longrightarrow & (\text{群}) \\ & & R & \longmapsto & \mathrm{Aut}_R^{\mathbb{Z}_2}(V \otimes R) \end{array}$$

ここで $\mathrm{Aut}_R^{\mathbb{Z}_2}(V \otimes R)$ は $\mathbb{Z}_2$-grading を保つ R-自己同型群．基底を適当にとり次のような行列表示を考える：

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \overset{m}{\leftrightarrow} & \overset{n}{\leftrightarrow} \end{array} \\ \begin{array}{c} m \updownarrow \\ n \updownarrow \end{array} & \begin{pmatrix} X & U \\ W & Y \end{pmatrix} \end{array} = \left(\begin{array}{c|c} x_{ij} & u_{i\ell} \\ \hline w_{kj} & y_{k\ell} \end{array} \right).$$

すると，対応するスーパー可換ホップ代数は次のようにかける：

$$\mathcal{O}(\mathrm{GL}_V) = \Bbbk[\, x_{ij},\ y_{k\ell},\ \det(X)^{-1},\ \det(Y)^{-1} \,] \otimes \wedge(u_{i\ell},\ w_{kj}).$$

ここで $\wedge(u_{i\ell},\ w_{kj})$ は $u_{i\ell}, w_{kj}$ たちの生成する外積代数である．

ブロック行列表示を用いると，構造は次で与えられる：

$$\Delta \begin{pmatrix} X & U \\ W & Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & U \\ W & Y \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} X & U \\ W & Y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} X \otimes X + U \otimes W & X \otimes U + U \otimes Y \\ W \otimes X + Y \otimes W & W \otimes U + Y \otimes Y \end{pmatrix};$$

$$\varepsilon \begin{pmatrix} X & U \\ W & Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = (\text{単位行列});$$

$$S \begin{pmatrix} X & U \\ W & Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (X - UY^{-1}W)^{-1} & -X^{-1}US(Y) \\ -Y^{-1}WS(X) & (Y - WX^{-1}U)^{-1} \end{pmatrix}.$$

ここで $\bullet^{-1}$ は逆行列を表す．

また GL_V の制限部は $(\mathrm{GL}_V)_{\mathrm{rcs}} = \mathrm{GL}_m \times \mathrm{GL}_n$ となる． □

1.3 スーパーの重要性や通常との相違点

スーパー群は単なる一般化ではなく，例えば次ような Deligne の定理が知られている：

定理 1.3.1 ([Del] (2002)). $\Bbbk$ を標数 0 の代数閉体とするとき，リジットなアーベル対称テンソル圏は，ある緩い条件をみたすならば，適当なスーパー・アフィン群の有限次元表現圏として実現できる．

また，通常の群との相違点として線形簡約群を例にとる．ここで線形簡約群とは，すべての有理表現が半単純になるもののことである．通常の代数群に関しては，$\Bbbk$ が標数 0 の体のとき，線形簡約群であることと簡約群（i.e., ユニポテント根基が自明）であることは同じ意味であるが，一方でスーパーの場合は；

定理 1.3.2 ([Wei] (2009)). $\Bbbk$ を標数 0 の代数閉体とするとき，$\mathfrak{G}$ が線形簡約スーパー代数群であることと，$\mathfrak{G}$ が $\prod_{r\geqslant 1} \mathrm{Spo}(1, 2r)^{n_r} \rtimes$ (簡約アフィン代数群) とかけることは同値.

記法に関しては，[Wei] を参照してください.

定理 1.3.3 ([Ma4] (2012)). $\Bbbk$ を正標数体とするとき，$\mathfrak{G}$ が線形簡約スーパー代数群であるならば，$\mathfrak{G}$ は制限部のみからなる．つまり $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_{\mathrm{rcs}}$.

以上のように，線形簡約スーパー代数群はかなり限られた形に制限されることが分かる.

2 Harish-Chandra ペアとは？

2.1 背景

もともと「スーパー対称性」は物理の方で 1970 年代初めの頃に研究されてきた．素粒子物理学ではその興味は素粒子の分類にあたるのだが，この分類はある種のリー群（ポアンカレ群）のユニタリ表現を見つけることと対応しており，従ってスーパー対称性の世界では，関心はスーパー（リー）群の構成やその表現にあるのである.

さてスーパー群の構成に関して，1977 年に B. Kostant は [Kos2] で（スーパー）Harish-Chandra ペアとよばれる，実リー群とスーパー・リー代数のある種のペアからスーパー実リー群を構成する手法を発見し，さらにこの方法で（スーパー）Harish-Chandra ペアのなす自然な圏とスーパー実リー群のなす圏が圏同値になることを示した．つまり，スーパー実リー群はよく研究されているスーパー・リー代数とリー群とで決定されてしまうことを意味している．複素解析的リー・スーパー群の場合でも E. G. Vishnyakova [Vis] により同様のことが成り立つことが示されている．一方で，C. Carmeli, R. Fioresi は [CF] にて，この Kostant の（スーパー）Harish-Chandra ペアによる構成法を，基礎体が標数 0 の代数的閉体のときのスーパー・アフィン代数群の場合へと適用させ，その成立を示している．他にもスーパー実解析的群の場合も示している.

増岡 は以上をふまえて [Ma4] にて，ホップ代数的アプローチによって Harish-Chandra ペアの理論を整理し，一般の任意標数 ($\neq 2$) の体上のスーパー・アフィン代数群で同様のことが成り立つことを示した.

	群	基礎体
Kostant (1977)	スーパー・リー群	$\Bbbk = \mathbb{R}$
Vishnyakova (2010)	スーパー・リー群	$\Bbbk = \mathbb{C}$
Carmeli&Fioresi (2011)	スーパー代数群	$\Bbbk = \overline{\Bbbk}$, $\mathrm{char}\,\Bbbk = 0$
増岡 (2012)	スーパー代数群	任意

2.2 Harish-Chandra ペアの定義

まず，Harish-Chandra ペアの理論のコンセプトを説明する．スーパー・アフィン代数群 $\mathfrak{G}$ が与えられたときに，この群のもつ基本的なデータとしてすぐに次の 2 つは考えられる：

$$G := \mathfrak{G}_{\mathrm{rcs}} \quad (\text{アフィン代数群}), \qquad V := (\mathrm{Lie}\,\mathfrak{G})_1 \quad (G\text{-加群}).$$

さらに両者の間には，スーパー・リー代数 $\mathrm{Lie}\,\mathfrak{G}$ のブラケットを制限したものとして $[\,,\,] : V \times V \to \mathrm{Lie}\,G$ がある．

Harish-Chandra ペアの理論は，実は以上のようなペアさえあれば，元のスーパー・アフィン代数群 $\mathfrak{G}$ の情報が復元できるということを保証しているのである．

簡単のため $\Bbbk$ を体とする．ただし $\mathrm{char}\,\Bbbk \neq 2$ [1]．ホップ代数の言葉使いで Harish-Chandra ペアの定義を正確に述べるとつぎのようになる：

定義 2.2.1. 有限生成可換ホップ代数 C と有限次元右 C-余加群 W からなるペア (C, W) が **Harish-Chandra ペア** であるとは，$V := W^*$ とおくとき，双線形写像 $[\,,\,] : V \times V \to P(C^\circ)$ か存在して次をみたす：

(a) $[\,,\,] : V \otimes V \to P(C^\circ)$ は左 C-余加群射;
(b) $[u, v] = [v, u]$, $(u, v \in V)$;
(c) $v \triangleleft [v, v]$, $(v \in V)$.

ここで V の左 C-余加群構造を $v \mapsto \sum v_{(-1)} \otimes v_{(0)} \in C \otimes V$ とかくとき，V の右加群構造は，$a \in C^\circ, v \in V$ に対して $v \triangleleft a := \sum \langle a, v_{(-1)} \rangle v_{(0)}$ で与えられる．

注意 2.2.2. Harish-Chandra ペア (C, W) が与えられているとき，$G := \mathrm{Sp}C$ とおくとこれはアフィン代数群であり，そのリー代数は $\mathrm{Lie}\,G = P(C^\circ)$ となっている．ここで C° は C の**ホップ双対** ([Swe, Chapter VI]) であり，$P(C^\circ)$ は C° の中の primitive 元

$$\Delta(a) \;=\; a \otimes 1 + 1 \otimes a \qquad (a \in C^\circ)$$

全体をあらわす．さらに，このとき与えられたブラケットを

$$[v, x] := -[x, v] := v \triangleleft x \qquad (v \in V,\ x \in \mathrm{Lie}\,G)$$

と拡張すると，$\mathrm{Lie}(G) \oplus V$ はスーパー・リー代数となる．

増岡 [Ma4] はホップ代数的アプローチをとることによって，次を示した：

---

[1] この条件は，スーパー対称性が自明なものにならないようにするための条件である．

定理 2.2.3 ([Ma4, Theorem 4.23.]). $\Bbbk$ を体とする. Harish-Chandra ペア (C, W) が与えられたとき, 有限生成スーパー可換ホップ代数 $A(C, W)$ が構成できる. さらにこの構成によって Harish-Chandra ペアのなす自然な圏 **HCP** と有限生成スーパー可換ホップ代数のなす圏 **AHSA** が圏同値になる[2)]：

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{AHSA} & \approx & \mathbf{HCP} \\ A(C, W) & \longleftarrow\!\shortmid & (C, W) \end{array}$$

このようにして, スーパー・アフィン代数群はよりわかりやすい Harish-Chandra ペアを通して研究できるのである. 例えば [Ma4, §6–8] を参照.

3 Chevalley 群

3.1 背景

Chevalley 群とは, 有限単純群の分類問題で古典型と合わせて例外型の群を統一的に構成する方法として, 1950 年代半ばに C. Chevalley によって最初に与えられた. ([C1], [C2], [C3]) 一般的な Chevalley 群の構成法は, 具体的に次のような手順による (see [Hum, Chapter VII], for example)：

(1) ルート系として Δ をもつ複素数体上の半単純リー代数 $\mathfrak{g}$ と, その有限次元忠実表現 $\rho : \mathfrak{g} \hookrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ を与える. すると忠実な表現なので ρ のウェイトで生成される加群 X は, $\mathbb{Z}\Delta$ (ルート束) $\subseteq X \subseteq \Lambda$ (ウェイト束) をみたす束になっている.

(この逆も言えていることに注意する. すなわち $\mathbb{Z}\Delta$ と Λ に挟まれているような任意の束に対して, 適当な $\mathfrak{g}$ の有限次元忠実表現が存在して, そのウェイトで生成される加群が与えられた束になるものがある. ([St, Remark of Lemma 27]))

(2) $\mathfrak{g}$ には構造定数がすべて $\mathbb{Z}$ の元になるような基底として **Chevalley 基底** $\{ X_\alpha, H_i \mid \alpha \in \Delta,\ 1 \leqslant i \leqslant \ell\,(:= \dim \mathfrak{h}) \}$ なるものが存在するが, このとき admissible 束といわれる $\rho(X_\alpha)^n/n!$ $(n \in \mathbb{N})$ で不変な $\mathbb{Z}$-form $M \subseteq V$ がとれる.

(3) $\rho(X_\alpha)$ はベキ零なので t を不定元として $\exp(t\,\rho(X_\alpha))$ が考えれるが, さらにこれは $\mathrm{SL}_m(\mathbb{Z}[t])$ $(m := \mathrm{rank}\, M)$ の元となる.

(4) 任意の体 k に対して, $t \in k$ の代入が考えれるが, このとき $\exp(t\,\rho(X_\alpha))$ は $M \otimes k$ 上の自己同型となるので, 抽象群として $\exp(t\,\rho(X_\alpha))$ $(\alpha \in \Delta,\ t \in k)$ によって $\mathrm{GL}(M \otimes k)$ 内で生成される群が存在する. これを k 上の **Chevalley 群** という.

[2)] 有限生成 (resp., スーパー) 可換ホップ代数は, affine Hopf (resp., super)algebra ともいわれる.

以上のようにして，Chevalley 群はルート系 Δ と適当な束 X に対して定まるのである．以下によく知られている Chevalley 群の代表例を示す ([St, p.45])：

Type of $\mathfrak{g}$	$\Lambda/\mathbb{Z}\Delta$	$X=\mathbb{Z}\Delta$(adjoint type)	$X=\Lambda$(universal type)
A_n	$\mathbb{Z}_{n+1}$	PSL_{n+1}	SL_{n+1}
B_n	$\mathbb{Z}_2$	$\mathrm{PSO}_{2n+1}(=\mathrm{SO}_{2n+1})$	Spin_{2n+1}
C_n	$\mathbb{Z}_2$	PSp_{2n}	Sp_{2n}
D_{2n+1}	$\mathbb{Z}_4$	PSO_{4n+2}	Spin_{4n+2}
D_{2n}	$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$	PSO_{4n}	Spin_{4n}

さて構成の仕方では Chevalley 群は抽象群として定義したのだが，B. Kostant は [Kos1] にて Chevalley 群が，$\mathbb{Z}$ 上定義されていること，すなわち $\mathbb{Z}$ 上のアフィン代数群の様々な体における有理点として与えられることを注意した．さらに 竹内 は [T3] (1982) で体上の **ハイパー代数 (hyperalgebra)** の理論を用いることによって，次の結果を得た：

定理 3.1.1 ([T3]). 有限階数自由加群 X と，$X\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$ 内の抽象ルート系 Δ であって，$\mathbb{Z}\Delta\subseteq X\subseteq\Lambda$ をみたすものについて．普遍包絡環 $\mathcal{U}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$ の $\mathbb{Z}$-部分代数として生成される次のようなものを考える：

$$\mathcal{U}^X:=\left\langle\ \frac{X_\alpha^n}{n!},\ \binom{H}{m}\ \middle|\ n,m\geqslant 0,\ \alpha\in\Delta,\ H\in X^*\right\rangle.$$

これには自然な余可換ホップ代数の構造が入る．与えられた Δ, X から構成される $\mathbb{Z}$ 上の Chevalley 群のハイパー代数は $\mathcal{U}^X$ に一致し，Chevalley 群に対応する $\mathbb{Z}$ 上の有限性生成可換ホップ代数はまさに $(\mathcal{U}^X)^\circ$ である．

このような洗練された形で，Chevalley 群をホップ代数的な立場から捉えることが可能になった．

ここで代数群のハイパー代数とは次のように定義される：

定義 3.1.2. 基礎環 $\Bbbk$ 上のアフィン代数群 $G=\mathrm{Sp}A$ に対して

$$\mathrm{hy}(G)\ :=\ \bigcup_{n=1}^{\infty}(A/\mathfrak{m}^n)^*\qquad(\subseteq A^*).$$

を G の **ハイパー代数** という．ここで $\mathfrak{m}:=\mathrm{Ker}(\varepsilon:A\to\Bbbk)$ とおいている．

これは自然に余可換ホップ代数の構造を持ち，$P(\mathrm{hy}(G))=\mathrm{Lie}\,G$ が成立し，また基礎環が標数 0 の体上ではリー代数の普遍包絡環と一致する $\mathrm{hy}(G)=\mathcal{U}(\mathrm{Lie}\,G)$ ことが知られている．

注意 3.1.3. 特に，正標数の体上でも代数群の性質をよく反映しており，ハイパー代数をもって代数群の研究をすることが可能となる．[T1] に詳しい．

3.2 Chevalley スーパー群

Chevalley 群も Fioresi, Gavarini [FG] (2012) によってスーパー化されている．その手法は通常の手順 (1)-(4) を直接にスーパー化しておこなわれている．ただし，最初に与えられるスーパー・リー代数としては，複素数体上の **古典的スーパー・リー代数** $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ を扱っており，このタイプのものはすでに V. Kac によって分類が済んでいる．

定理 3.2.1 ([Kac])．複素数体上の古典的スーパー・リー代数 $\mathfrak{g}$ は，単純スーパー・リー代数と同型か，以下のスーパー・リー代数のいずれかと同型である：

Type of $\mathfrak{g}$	parameter	even part
$A(m,n)$	$m \geqslant n \geqslant 0,\ m+n>0$	$U(1) \oplus A_m \oplus A_n$
$B(m,n)$	$m \geqslant 0,\ n \geqslant 1$	$B_m \oplus C_n$
$C(n)$	$n \geqslant 3$	$U(1) \oplus C_n$
$D(m,n)$	$m \geqslant 2,\ n \geqslant 1$	$D_m \oplus C_n$
$P(n)$	$n \geqslant 2$	A_n
$Q(n)$	$n \geqslant 2$	A_n
$F(4)$		$A_1 \oplus B_3$
$G(3)$		$A_1 \oplus G_2$
$D(2,1;a)$	$-1, 0 \neq a \in \mathbb{K}$	$A_1 \oplus A_1 \oplus A_1$

ここで表の記号は *[FSS]* を参照してください．

以降簡単のために 基礎環を $\Bbbk = \mathbb{Z}$ とする．

Fioresi, Gavarini の主結果は次のように述べられる．

定理 3.2.2 ([FG, Theorem 5.23, Proposition 5.25])．$\mathbb{Z}$ 上のスーパー群 $\mathbb{G}$ が構成でき，次をみたす：

(FG1) $\mathbb{G}$ は $\mathbb{Z}$ 上のスーパー・アフィン代数群．
(FG2) $\mathbb{G}_{\mathrm{rcs}}$ は広義 Chevalley 群．

この $\mathbb{G}$ を **Chevalley スーパー 群** という．

ここで Chevalley 群の構成で，最初に（半単純でなく）簡約リー代数を扱っても $\mathbb{Z}$ 上の分裂連結簡約代数群が構成できるので，これを広義 Chevalley 群ということにする．広義 Chevalley 群は与えられたルート・データによって一意的に決まることも知られている．詳細などは [J, Part II, Chapter 1] を参照してください．

また彼らは体上で Chevalley スーパー群に対する Lie's third Theorem として，次の結果も示している：

定理 3.2.3. 基礎環 $\Bbbk$ が $\mathrm{char}\,\Bbbk \neq 2, 3$ の体のとき，古典的スーパー・リー代数 $\mathfrak{g}$ から構成された Chevalley スーパー群 $\mathbb{G}$ に対して，$\mathrm{Lie}\,\mathbb{G} = \mathfrak{g}$ が成立する．

4 $\mathbb{Z}$ 上の Harish-Chandra ペアの理論

さて，これまで紹介したとおり，体上ならばスーパー・アフィン代数群というものは Harish-Chandra ペアを通して研究でき (定理 2.2.3)，Chevalley 群というものはホップ代数的なアプローチによって研究できる (定理 3.1.1)．すると自然に [FG] の構成した Chevalley スーパー群なるものも，ホップ代数的に Harish-Chandra ペアを用いて（より見通しよく直接的に）構成できないか？という疑問がわいてくる[3)]．

このためには，Harish-Chandra ペアの理論を $\mathbb{Z}$ 上に拡張しなければならない．体上の構成法 ([Ma4]) をおさらいしながら，やや一般的な状況で考え，どこに条件を付け加えればよいかを見ていくことにする．

基礎環は $\Bbbk = \mathbb{Z}$ とする．まず材料として初めに次を与える：

$$G \ : \ \text{広義 Chevalley 群}, \qquad W \ : \ \text{有限生成自由 } G\text{-加群}.$$

このときに，G のハイパー代数を $J := \mathrm{hy}(G)$，G に対応する有限生成可換ホップ代数を $C := \mathcal{O}(G)$，$\mathbb{Z}$-双対として $V := W^*$ とおく．さらに適当な双線形写像 $[\,,\,] : V \times V \to P(J)$ が存在して，定義 2.2.1 の条件をみたすものとする．このときも同様にして (C, W) を Harish-Chandra ペアといってしまう．

構成の手順としては，まずハイパー（スーパー）代数に相当する方を構成し，そしてそのある種の "双対" としてスーパー・ホップ代数に相当するものを得る，といった流れである．

4.1 ハイパー（スーパー）代数に相当する方の構成

V のテンソル代数 $T(V)$ と J との半直積 (see [Swe, 7.2]) として

$$\mathcal{H}(J, V) \ := \ J \ltimes T(V)$$

が構成できる．これは余代数構造としては $J \otimes T(V)$ であり，代数構造は $1 \ltimes 1$ を単位元として次で積が定まる：

$$(a \ltimes x)(b \ltimes y) = \sum ab_{(1)} \ltimes (x \triangleleft b_{(2)})y.$$

---

3) ただし，前述のとおり "広義"Chevalley 群を扱うことになるので，多少注意が必要である．

ここで V の右 J-加群の作用を $\triangleleft$ とかいた．さらにこれは次のようなアンチポードで，スーパー・ホップ代数となる：

$$S(a \rtimes x) = \sum S(a_{(1)}) \otimes (S(x) \triangleleft a_{(2)}).$$

この $\mathcal{H}(J, V)$ 内の両側スーパー・イデアルとして

$$I(J, V) \ := \ \langle 1 \rtimes (uv + vu) - [u, v] \rtimes 1 \mid u, v \in V \rangle$$

をとり，$H(J, V) := \mathcal{H}(J, V)/I(J, V)$ とおくとき：

定理 4.1.1 (cf. [Ma4, Theorem 3.9 (1)]). $H(J, V)$ はスーパー余可換ホップ代数である．

これで一応は，ハイパー（スーパー）代数に相当するものが構成できたのであるが，体上であれば，さらに詳しく構造がわかる：

命題 4.1.2 ([Ma4, Lemma 3.11, Proposition 3.12]). $\Bbbk$ を体とする．任意の全順序付けられた V の基底 $(\mathfrak{X}, \leqslant)$ をとるとき

$$x_1 x_2 \cdots x_n, \qquad (x_1 < x_2 < \cdots < x_n \ \text{ in } \mathfrak{X})$$

どもは $H(J, V)$ の J-自由基底をなす．このとき，次のような単位元を保つ左 J-加群 スーパー余代数同型が存在する：

$$\phi_{\mathfrak{X}} \ : \ J \otimes \wedge(V) \xrightarrow{\cong} H(J, V).$$

この命題の証明では，$H(J, V)$ の中で $v \in V$ に対して $[v, v] = 2v^2$ i.e., $v^2 = [v, v]/2$ のように，「係数に 1/2 を用いてよい」というところに体の条件が使われている．では，我々の $\Bbbk = \mathbb{Z}$ ではどのような条件を課せば同様のことが成り立つのか？単純に次の条件で十分である：

仮定 4.1.3. 全順序付けられた V の基底 $(\mathfrak{X}, \leqslant)$ であって，各 $x \in \mathfrak{X}$ に対して $[x, x] \in 2P(J)$ をみたすものが取れる．

この仮定の下で先の 命題 4.1.2 が我々の $\Bbbk = \mathbb{Z}$ の場合でも成立する．

4.2 スーパー・ホップ代数に相当する方の構成

W のテンソル “余” 代数 $T_c(W)$ (see [Ma4, §4.1]) と C との “余” 半直積[4] として；

$$\mathcal{A}(C, W) \ := \ C \blacktriangleright\!\!< T_c(W)$$

[4] これは先程の半直積の “双対” として定義される．

が構成できる．これは代数構造としては $C\otimes T_c(W)$ であり，余代数構造は次で与えられる：

$$\begin{aligned}\Delta(c \blacktriangleright\!\!< z) &= \sum \left(c_{(1)} \otimes (z_{(1)})_{(0)}\right) \otimes \left((z_{(1)})_{(1)} c_{(2)} \otimes z_{(2)}\right),\\ \varepsilon(c \blacktriangleright\!\!< z) &= \varepsilon(c)\,\varepsilon(z).\end{aligned}$$

ここで W の右 C-余加群の作用を $w \mapsto \sum w_{(0)} \otimes w_{(1)} \in W \otimes C$ とかいた．さらにこれは次のようなアンチポードで，スーパー・ホップ代数となる：

$$S(c \blacktriangleright\!\!< z) = \sum S(c\, z_{(1)}) \otimes S(z_{(0)}).$$

このとき次のような自然な（ホップ）ペアリングが考えられる：

$$\begin{array}{cccc}\langle\, ,\rangle : & \mathcal{H}(J, V) \times \mathcal{A}(C, W) & \longrightarrow & \mathbb{Z}\\ & (a \rhd\!\!< x,\ c \blacktriangleright\!\!< z) & \longmapsto & \langle a, c\rangle\, \langle x, z\rangle\end{array}.$$

このペアリングに関して，$\mathcal{A}(C, W)$ をやや広げた（完備）スーパー・ホップ代数

$$\widehat{\mathcal{A}}(C, W) \ := \ \prod_{n=0}^{\infty} C \otimes T^n(W)$$

の中での "双対" として

$$A(C, W) \ := \ \{ Z \in \widehat{\mathcal{A}}(C, W) \mid \langle I(J, V),\, Z\rangle = 0 \}$$

とおく．

今の場合，C は $\mathbb{Z}$-自由であることと，$C \subseteq J^\circ$ となる[5] ことが知られているので，これらの事実より次がいえる：

定理 4.2.1 (cf. [Ma4, Lemma 4.20]). （完備スーパー・ホップ代数 $\widehat{\mathcal{A}}(C, W)$ の中でみて）$A(C, W)$ はスーパー可換ホップ代数となる．

さらに次が成り立つ[6]：

命題 4.2.2. 自然な対応による線形同型 $\widehat{\mathcal{A}}(C, W) \cong \mathrm{Hom}_J(\mathcal{H}(J, V), C)$ があるが，これは同型 $A(C, W) \cong \mathrm{Hom}_J(H(J, V), C)$ を誘導する．

いままで "双対" と言ってきたのは，このことに基づいている．

このことと，命題 4.1.2 の同型 $\phi_{\mathfrak{X}}$ を用いると，$A(C, W) \cong C \otimes \wedge(W)$ なる同型を得るので次が示される：

---

[5] 定理 3.1.1 でもみたように，G が単なる Chevalley 群であれば $C = J^\circ$ となる．

[6] この事実は Koszul [Kosz] の中で大切な役割を果たしている．

定理 4.2.3 (cf. [Ma4, Lemma 4.21]). $A(C, W)$ は $\mathbb{Z}$ 上の有限生成スーパー可換ホップ代数である.

以上から，スーパー代数群 $\mathfrak{G} := \mathrm{SSp}\,A(C, W)$ を構成することができた.

5 主結果

5.1 先行研究 [FG] に関して

簡単のため基礎環は $\Bbbk = \mathbb{Z}$ とする.

$$G \ : \ \text{広義 Chevalley 群}, \qquad W \ : \ \text{有限生成自由 } G\text{-加群}.$$

が与えられたとき，$J := \mathrm{hy}(G)$，$C := \mathcal{O}(G)$，$V := W^*$ とおく．また (C, W) が Harish-Chandra ペアをなしているとする.

定理 5.1.1. V, J が仮定 *4.1.3* をみたすならば，$A(C, W)$ は有限生成スーパー可換ホップ代数であり，対応するスーパー・アフィン代数群

$$\mathfrak{G} := \mathrm{SSp}\,A(C, W)$$

は，与えられた広義 Chevalley 群 G を制限部にもち，$\mathfrak{G}$ のハイパー代数は構成した $H(J, V)$ に一致する.

さて古典的スーパー・リー代数 $\mathfrak{g}\,(= \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1)$ とその有限忠実表現が与えられたとき，偶部の簡約リー代数 $\mathfrak{g}_0$ と表現から広義 Chevalley 群 G が作られる．さらに，$\mathfrak{g}$ の Chevalley basis (see [FG, Definition 3.3]) をとり，これに関する $\mathfrak{g}$ の $\mathbb{Z}$-form を $\mathfrak{g}^{\mathbb{Z}}\,(= \mathfrak{g}_0^{\mathbb{Z}} \oplus \mathfrak{g}_1^{\mathbb{Z}})$ とかく．上の記号で $V = \mathfrak{g}_1^{\mathbb{Z}}$ とする.

いま古典的スーパー・リー代数の分類（とそのルート系）と照らし合わせると V, $J\,(= \mathrm{hy}(G))$ が仮定 4.1.3 をみたすことはすぐにわかるので，上記の定理 5.1.1 が適用でき，スーパー・アフィン代数群 $\mathfrak{G}$ が構成される．実はこの $\mathfrak{G}$ が [FG] でいうところの Chevalley スーパー群 $\mathbb{G}$ と一致することが示される.

系 5.1.2. *[FG]* で定義された Chevalley スーパー群は，我々の Harish-Chandra ペア構成から得られる．また，定理 *3.2.3* も成立する.

Chevalley スーパー群が，より一般的に構成できたことになる.

注意 5.1.3. 基礎環は $\Bbbk = \mathbb{Z}$ の場合だけでなくても，$\Bbbk$ が PID（単項イデアル整域）で $2 \in \Bbbk$ が zero-divisor でなければ，定理 5.1.1 は成立する．また，より一般に最初に与えるアフィン代数群 G は，広義 Chevalley 群でなくても $\mathcal{O}(G)$ が $\Bbbk$-自由加群で，自然な写像により $\mathcal{O}(G) \subseteq \mathrm{hy}(G)^{\circ}$ などとなっていれば，定理 5.1.1 は成立する.

5.2 表現に関して

やはり群を扱っているのだから，その表現を考えたくなる．簡単のため基礎環は $\Bbbk = \mathbb{Z}$ とする．

まず通常の群の場合に関して．G を広義 Chevalley 群（分裂 連結簡約群）とし，T を G の分裂極大トーラスとする．一般に，左 G-加群 M が与えられたとき，対応して M には右 $\mathcal{O}(G)$-余加群構造が入ることに注意すると，最終的に M には左 $\mathrm{hy}(G)$-加群構造が次のようにして入る．各 $a \in \mathrm{hy}(G)$ に対して

$$\begin{array}{ccccc} M & \longrightarrow & M \otimes \mathcal{O}(G) & \longrightarrow & M \\ m & \longmapsto & \sum m_{(0)} \otimes m_{(1)} & \longmapsto & \sum m_{(0)} \langle a, m_{(1)} \rangle \end{array}$$

これを G **から誘導される** $\mathrm{hy}(G)$**-加群構造** という．

定義 5.2.1. $\mathrm{hy}(G)$-加群 M が $\mathrm{hy}(G)$-T**-加群** であるとは，M 上に T-加群構造が存在して，T から誘導される $\mathrm{hy}(T)$-加群構造と，与えられた $\mathrm{hy}(G)$-加群構造の $\mathrm{hy}(T)$ への制限が一致するときをいう．

さてこの言葉づかいのもとで，次の結果が知られている[7]：

定理 5.2.2 ([J, Part II, Chapter 1.20], for example). $\mathbb{Z}$-射影的加群 M 上の構造に関して，G-加群構造全体と，局所有限 $\mathrm{hy}(G)$-T-加群構造全体は一対一に対応する．

この結果とは独立に，定理 3.1.1 を用いると，次を得る：

定理 5.2.3. G が Chevalley 群（半単純群）であれば，$\mathbb{Z}$-平坦加群 M 上の構造に関して，G-加群構造全体と，局所有限 $\mathrm{hy}(G)$-加群構造全体は一対一に対応する．

いずれにせよこれらの定理から，群の表現論はより代数的に調べることが可能になるとわかる．

実は，以上の結果のスーパー版も示すことができる．つまり，$\mathfrak{G}$ を G から構成されるスーパー・アフィン代数群とするとき，定義 5.2.1 と同様の言葉づかいのもとで次が成立する[8]：

定理 5.2.4. $\mathbb{Z}$-射影的加群 M 上の構造に関して，

(1) $\mathfrak{G}$-加群構造全体と，局所有限 $\mathrm{hy}(\mathfrak{G})$-$T$-加群構造全体は一対一に対応する．

---

[7] この定理は基礎環 $\mathbf{k}$ は整域でも成立．

[8] こちらは構成の仕方から $\mathbf{k}$ が PID で $2 \in \mathbf{k}$ が zero-divisor でなければ $\mathbf{k}$ 上でも成立する．

(2) 特に，G が Chevalley 群 (半単純群) であれば，$\mathfrak{G}$-加群構造全体と，局所有限 hy($\mathfrak{G}$)-加群構造全体は一対一に対応する．

注意 5.2.5. $\Bbbk$ を代数閉体とする．[BK] では次の形の $\Bbbk$ 上のスーパー・アフィン代数群に関する表現論が研究されている：

$$Q(n)(R) := \left\{ \left(\begin{array}{c|c} S & S' \\ \hline -S' & S \end{array} \right) \in \mathrm{GL}(n|n)(R) \;\middle|\; S \in \mathrm{Mat}_n(R_0),\ S' \in \mathrm{Mat}_n(R_1) \right\}.$$

ここで $R = R_0 \oplus R_1$ は $\Bbbk$ 上のスーパー可換代数．実はこのスーパー群も 注意 5.1.3 で述べたように，我々の Harish-Chandra ペア構成から得られることが分かるので，定理 5.2.4 (1) が成立することになる．このことは [BK, Corollary 5.7] で述べられており，これは彼らの研究の key result である．

参考文献

[BK] J. Brundan, A. Kleshchev, *Modular representations of the supergroup $Q(n)$, I*, J. Algebra **206** (2003), 64-98.

[CF] C. Carmeli, R. Fioresi, *Super distributions, analytic and algebraic super Harish-Chandra pairs*, preprint, arXiv:1106.1972 [math.RA].

[C1] C. Chevalley, *Sur certaines groupes simples*, Tôhoku Math. J. (2) **7** (1955), 14–66.

[C2] C. Chevalley, *Classification des groupes de Lie algébriques*, Notes polycopiées. Inst. H. Poincaré, Paris (1956–1958).

[C3] C. Chevalley, *Certain schémas de groupes semi-simples*, Sém. Bourbaki 13é année, (1960–1961), Exp.219.

[Del] P. Deligne, *Catégories tensorielles*, Moscow Math. Journal **2** (2002) no.2, 227–248.

[FG] R. Fioresi, F. Gavarini, *Chevalley supergroups*, Mem. Amer. Math. Soc., **1014** (2012).

[FG2] R. Fioresi, F. Gavarini, *Algebraic supergroups with Lie superalgebras of classical type*, preprint arXiv:1106.4168v4 [math.RA].

[FSS] L. Frappat, P. Sorba, A. Sciarrino, *Dictionary on Lie algebras and superalgebras*, Academic Press, Inc., San Diego, CA, 2000.

[Hum] J. E. Humphreys, *Introduction to Lie algebras and representation theory*, Grad. Texts in Math. **9**, Springer-Verlag, New-York-Berlin-Heidelberg, 1972.

[J] J. C. Jantzen, *Representations of algebraic groups*, second edition, Mathematical Surveys and Monographs **107**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.

[Kac] V. G. Kac, *Lie superalgebras*, Adv. Math. **26** (1977), 8–26.

[Kos1] B. Kostant, *Groups over $\mathbb{Z}$*, Algebraic Groups and Their Discontinuous Subgroups, Proc. Symp. Pure Math., vol. **9**, Amer. Math. Soc., 1966, pp.90–98. MR0207713 (34:7528).

[Kos2] B. Kostant, *Graded manifolds, graded Lie theory, and prequantization*, in: Differential geometrical methods in mathematical physics (Proc. Sympos., Univ. Bonn, Bonn, 1975), pp. 177-306; Lecture Notes in Math., **570**, Springer, Berlin, 1977.

[Kosz] J.-L. Koszul, *Graded manifolds and graded Lie algebras*, Proceedings of the international meeting on geometry and physics (Florence, 1982), 71-84, Pitagora, Bologna, 1982.

[Ma3] A. Masuoka, *The fundamental correspondences in super affine groups and super formal groups*, J. Pure Appl. Algebra **202** (2005), 284–312.

[Ma4] A. Masuoka, *Harish-Chandra pairs for algebraic affine supergroup schemes over an arbitrary field*, Transform. Groups, **17** (2012), no.4, 1085–1121.

[St] R. Steinberg, *Lectures on Chevalley groups*, Yale University, New Haven, Conn., 1968.

[Swe] M. E. Sweedler, *Hopf algebras*, W. A. Benjamin, Inc., New York, 1969.

[T1] M. Takeuchi, *Tangent coalgebras and hyperalgebras I*, Japanese. J. of Math. **42** (1974), 1–143.

[T2] M. Takeuchi, *On coverings and hyperalgebras of affine algebraic groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **211** (1975) 249–275.

[T3] M. Takeuchi, *Hyperalgebraic construction of Chevalley group schemes* (in Japanese), RIMS Kokyuroku **473** (1982), 57–70.

[T4] M. Takeuchi, *Topological Coalgebras*, K. Algebra **97** (1985), 509–539.

[Vis] E. G. Vishnyakova, *On complex Lie supergroups and homogeneous split supermanifolds*, preprint arXiv:0908.1164v1 [math.DG] (2009).

[Wat] W. C. Waterhouse, *Introduction to affine group schemes*, Graduate Texts in Math. Vol. **66**, Springer-Verlag, New York/Heidelberg/Berlin, 1979.

[Wei] R. Weissauer, *Semisimple algebraic tensor categories*, preprint, arXiv:0909.1793 [math.CT].